III ვარიანტი

ზოგადი ხასიათის მითითებები

შეფასებისას ქულა არ აკლდება შემდეგ შემთხვევებში:

1) თუ ამოცანის პასუხი წარმოდგენილია რიცხვითი გამოსახულების სახით, მაგრამ არ არის გამარტივებული;
2) ამოცანის ამოხსნის ბოლო ეტაპზე პასუხის გამოთვლის დროს დაშვებულია მექანიკური ხასიათის შეცდომა;

ერთი ქულა აკლდება შემდეგ შემთხვევაში:

თუ შეფასების სქემის რომელიმე კომბინაცია არ სრულდება მექანიკური ხასიათის ერთი შეცდომის გამო, მაშინ ამოცანის ამოხსნა შეფასდება ამ კომბინაციის შესაბამის ქულას მინუს ერთი ქულა.

მექანიკური ხასიათის შეცდომებია:

ა) არითმეტიკულ გამოთვლაში დაშვებული შეცდომა, რომელიც ტექნიკური თვალსაზრისით არ იწვევს ამოცანის არსებით გამარტივებას;

ბ) ტოლობის გადაწერისას რომელიმე წევრის ნიშნის ან კოეფიციენტის არასწორად გადატანა ან გამოტოვება, რომელიც ტექნიკური თვალსაზრისით არ იწვევს ამოცანის არსებით გამარტივებას.

შეფასების სქემაში შემდეგი სიტყვები: “გამოთვლა”, “პოვნა”, “მიღება”, „პასუხი“, გულისხმობს, რომ შედეგი მიღებულია დასაბუთებული მსჯელობით.

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ა	დ	ა	ა	ა	გ	დ	ბ	ბ	დ	ბ	დ	გ	ბ

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
დ	გ	გ	დ	გ	ა	გ	ა	ბ	გ	ა	დ	ბ

(2) 28.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 12-4x=3y \end{cases}$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 12-4x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3x-1}{2} \\ 12-4x=3\cdot\dfrac{3x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{27}{17} \\ y=\dfrac{32}{17} \end{cases}$$

პასუხი: $x=\dfrac{27}{17}$, $y=\dfrac{32}{17}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო ერთი ცვლადის შემცველი განტოლება;

ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.

(2) 29.

v კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი მუხრუჭის ამოქმედებიდან სრულ გაჩერებამდე გადის $s = k \cdot v^2$ მეტრ მანძილს, სადაც k მუდმივი სიდიდეა. ცნობილია, რომ 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი მუხრუჭის ამოქმედებიდან სრულ გაჩერებამდე გადის 45 მეტრს. რა მანძილს გაივლის 90კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი მუხრუჭის ამოქმედებიდან სრულ გაჩერებამდე?

ამოხსნა

ვთქვათ, 90კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი მუხრუჭის ამოქმედებიდან სრულ გაჩერებამდე გაივლის x მეტრს. მაშინ სამართლიანია ტოლობა $x = k \cdot 90^2$.

ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს ტოლობა $45 = k \cdot 60^2$. ამ ორი ტოლობიდან k-ს გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ $x = \frac{45}{60^2} \cdot 90^2 = 45 \cdot \frac{9}{4} = 101,25$ მ.

პასუხი: $101,25$ მ

ამოხსნის ეტაპები

ა) შემოიტანა საჭირო ცვლადი და დაწერა გამოსახულება $x = k \cdot 90^2$; ან მიიღო გამოსახულება $45 = k \cdot 60^2$.

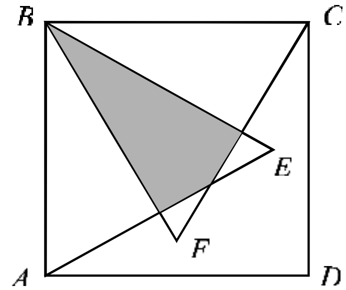
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

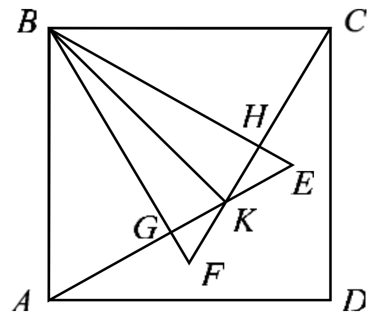
1 ქულა - ა .
2 ქულა - ა, ბ;

(3) 30.

$ABCD$ კვადრატის AB და BC გვერდებზე აგებულია ორი ტოლგვერდა სამკუთხედი ისე, როგორც სურათზეა მითითებული. იპოვეთ სამკუთხედების თანაკვეთით შექმნილი გამუქებული ფიგურის ფართობი, თუ კვადრატის გვერდი a-ს ტოლია.



ამოხსნა



$\angle ABG = \angle CBH = 90° - 60° = 30°$, ამიტომ $\angle GBH = 30°$. BG და BH შესაბამისად ABE და BCF ტოლგვერდა სამკუთხედების სიმაღლეებია, ამიტომ $BG = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. რადგან $\triangle BGK = \triangle BHK$ როგორც კათეტითა და ჰიპოტენუზით ტოლი მართკუთხა სამკუთხედები, ამიტომ $\angle GBK = \angle HBK = 15°$ და $GK = HK = BG \cdot \mathrm{tg}15° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}15°$. აქედან

$$S_{BGKH} = 2S_{BGK} = BG \cdot GK = \frac{3a^2\,\mathrm{tg}15°}{4}.$$

პასუხი: $\dfrac{3a^2}{4}\mathrm{tg}15° \quad \left(= \dfrac{3(2-\sqrt{3})a^2}{4}\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა $\angle GBH$ ან BG ან BH ან BK მონაკვეთებიდან ერთ-ერთი;
ბ) გამოთვალა GK ან HK მონაკვეთებიდან ერთ-ერთი;
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა .
2 ქულა - ა, ბ;
3 ქულა - ა, ბ, გ.

(3) 31.

იპოვეთ $b_1, b_2, ..., b_n$ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, თუ $b_1 + b_2 + b_3 = -54$ და $b_4 + b_5 + b_6 = 2$.

ამოხსნა

გვაქვს
$b_n = b_1 q^{n-1} \Rightarrow b_2 = b_1 q,\ b_3 = b_1 q^2,\ b_4 = b_1 q^3, b_5 = b_1 q^4,\ b_6 = b_1 q^5$.

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = -54 \\ b_1 q^3 (1+q+q^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow\ q^3 = \frac{b_4}{b_1} = -\frac{1}{27}\ \Rightarrow q = -\frac{1}{3}.$$

პასუხი: $-\frac{1}{3}$

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა პირობაში შემავალი ერთ-ერთი ტოლობა პროგრესიის რომელიმე წევრისა და
მნიშვნელის საშუალებით (მაგალითად, $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = -54$, ან $b_4 + b_4 q + b_4 q^2 = 2$);

ბ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელის მიმართ;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;

2 ქულა - ა, ბ;

3 ქულა - ა, ბ, გ.

(3) 32.

ამოხსენით განტოლება $12x-8\sqrt{x}+1=0$.

ამოხსნა

$\sqrt{x}$ აღვნიშნოთ y-ით, მაშინ მოცემული განტოლება წარმოადგენს კვადრატულ განტოლებას y-ის მიმართ: $12y^2-8y+1=0$, რომლის ფესვებია $y=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{12}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{array}\right.$.

ამიტომ გვექნება $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ და $\sqrt{x}=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{36}$.

პასუხი: $x=\frac{1}{4}$ და $x=\frac{1}{36}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა კვადრატული განტოლება y-ის მიმართ $12y^2-8y+1=0$ ან შენიშნა, რომ მოცემული განტოლება წარმოადგენს კვადრატულ განტოლებას $\sqrt{x}$-ის მიმართ;

ბ) იპოვა $12y^2-8y+1=0$-ის ფესვები $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{6}$;

გ) მიიღო პასუხი.

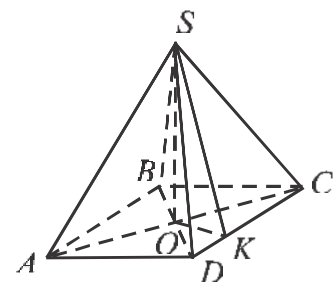
შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ;
3 ქულა - ა, ბ, გ.

(3) 33.

პირამიდის ფუძე არის რომბი რომლის დიაგონალები ტოლია 30 სმ-ის და 40 სმ-ის. პირამიდის სიმაღლის ფუძე არის რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის სიმაღლე 24 სმ-ის ტოლია.

ამოხსნა 1



შევნიშნოთ, რომ $SABCD$ პირამიდის გვერდითი წახნაგები ერთმანეთის ტოლი სამკუთხედებია, ამიტომ გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლი იქნება $S=\frac{1}{2}P_{ABCD}\cdot SK$, სადაც $P_{ABCD}=4\cdot CD$. რადგან რომბის დიაგონალები 30 სმ-ის და 40 სმ-ის ტოლია, ამიტომ მისი გვერდის სიგრძე ტოლი იქნება:
$CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{225+400}=25$ სმ.

ე.ი. $P_{ABCD}=4\cdot 25=100$ სმ. SK -ს საპოვნელად განვიხილოთ მართკუთხა სამკუთხედი SOK .

პირობის თანახმად $SO=24$ სმ., ხოლო COD მართკუთხა სამკუთხედში OK არის სიმაღლე და $OK=\frac{OD\cdot OC}{CD}=\frac{15\cdot 20}{25}=12$ სმ, მაშინ $SK=\sqrt{OK^2+SO^2}=\sqrt{144+576}=\sqrt{720}=12\sqrt{5}$ სმ.

საბოლოოდ მივიღეთ $S=\frac{1}{2}P_{ABCD}\cdot SK=\frac{1}{2}100\cdot 12\sqrt{5}=600\sqrt{5}$ სმ².

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა $ABCD$ რომბის გვერდი; ან OK მონაკვეთის სიგრძე; ან გამოთვალა $ABCD$ რომბის ფართობი;

ბ) იპოვა SK მონაკვეთის სიგრძე ან გამოთვალა SKO კუთხის კოსინუსი;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ;
3 ქულა - ა, ბ, გ.

(4) 34.

ორმა ქვეითმა M და N პუნქტებიდან ამ პუნქტების შემაერთებელი ბილიკის გასწვრივ, ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით მუდმივი სიჩქარეებით, ერთდროულად დაიწყეს მოძრაობა. ისინი პირველად ერთმანეთს შეხვდნენ მაშინ, როდესაც M პუნქტიდან გამოსულ ქვეითს გავლილი ჰქონდა 1600 მეტრი. მათ გააგრძელეს მოძრაობა, ჩავიდნენ შესაბამისად N და M პუნქტებში, შეუჩერებლად გამობრუნდნენ უკან და იმავე მუდმივი სიჩქარეებით გააგრძელეს მოძრაობა. მეორედ ქვეითები ერთმანეთს შეხვდნენ N პუნქტიდან 900 მეტრ მანძილზე. იპოვეთ M და N პუნქტების შემაერთებელი ბილიკის სიგრძე.

ამოხსნა 1

ვთქვათ M -იდან გამოსული ქვეითის სიჩქარეა x მ/წთ, N -იდან გამოსული ქვეითის სიჩქარეა y მ/წთ, ხოლო მთელი გზის სიგრძეა s მეტრი. მაშინ $\frac{1600}{x}$ და $\frac{s-1600}{y}$ სიდიდეები შესაბამისად გამოხატავენ პირველ შეხვედრამდე დახარჯულ დროს, ამიტომ გვაქვს განტოლება: $\frac{1600}{x}=\frac{s-1600}{y}$. ასევე, $\frac{s+900}{x}$ და $\frac{2s-900}{y}$ სიდიდეები გამოხატავენ მოძრაობის დაწყებიდან მეორე შეხვედრამდე დახარჯულ დროს, შესაბამისად გვაქვს განტოლება: $\frac{s+900}{x}=\frac{2s-900}{y}$. მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases}\frac{1600}{x}=\frac{s-1600}{y}\\ \frac{s+900}{x}=\frac{2s-900}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{s-1600}{1600}\\ \frac{y}{x}=\frac{2s-900}{s+900}\end{cases}\Rightarrow\frac{s-1600}{1600}=\frac{2s-900}{s+900}\Rightarrow s^2-3900s=0\Rightarrow s=3900.$$

პასუხი: 3900 მ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა საჭირო ცვლადებით მოძრაობის დაწყებიდან პირველ ან მეორე შეხვედრამდე

გასული დრო (მაგალითად, $\frac{1600}{x}$ ან $\frac{s-1600}{y}$ ან $\frac{s+900}{x}$ ან $\frac{2s-900}{y}$);

ბ) მიიღო განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შესაძლებელია საჭირო სიდიდის

პოვნა (მაგალითად, $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{s-1600}{1600}\\ \frac{y}{x}=\frac{2s-900}{s+900}\end{cases}$ ან მისი ტოლფასი);

გ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება s -ის (ან $\frac{y}{x}$ -ის) მიმართ;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ბ;
3 ქულა - ბ, გ;
4 ქულა-ბ, გ, დ.

შენიშვნა.იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა. რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

ამოხსნა 2

ვთქვათ მთელი გზის სიგრძეა s მეტრი. პირველ შეხვედრამდე ქვეითებმა გაიარეს შესაბამისად, 1600 მეტრი და $s-1600$ მეტრი, ჯამურად ორივე ქვეითმა გაიარა s მეტრი. მეორე შეხვედრამდე ქვეითებმა შესაბამისად გაიარეს $s+900$ მეტრი და $2s-900$ მეტრი, ჯამურად ორივე ქვეითმა გაიარა $3s$ მეტრი. ამიტომ მოძრაობის დაწყებიდან მეორე შეხვედრამდე სამჯერ მეტი დრო დაიხარჯა, ვიდრე მოძრაობის დაწყებიდან პირველ შეხვედრამდე. შესაბამისად, პირველი ქვეითის მიერ გავლილი მანძილი მეორე შეხვედრამდე სამჯერ მეტია პირველ შეხვედრამდე მის მიერ გავლილ მანძილზე. ამიტომ გვექნება განტოლება:

$$\frac{s+900}{1600}=3 \Rightarrow s=3\cdot1600-900=3900.$$

პასუხი: 3900 მ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა პირველ და მეორე შეხვედრამდე გავლილი მანძილები;
ბ) შენიშნა, რომ მოძრაობის დაწყებიდან მეორე შეხვედრამდე სამჯერ მეტი დრო დაიხარჯა,
ვიდრე მოძრაობის დაწყებიდან პირველ შეხვედრამდე.
გ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება s -ის მიმართ;
დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ბ;
3 ქულა - ბ, გ;
4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა. რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

(4) 35.

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $4^x - a\cdot 2^x + a + 2 = 0$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

ამოხსნა

აღვნიშნოთ $y = 2^x$, მაშინ დასმული ამოცანა იქნება შემდეგი ამოცანის ტოლფასი: ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $y^2 - a\cdot y + a + 2 = 0$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი დადებითი ამონახსნი.
განვიხილოთ შემთხვევები:

1) $D = a^2 - 4(a+2) = 0 \Rightarrow a = 2 \pm 2\sqrt{3}$. რადგან ამ შემთხვევაში $y = \dfrac{a}{2}$, ამიტომ $y > 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a = 2 + 2\sqrt{3}$.

2) $D = a^2 - 4(a+2) > 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty;\, 2 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(2 + 2\sqrt{3};\, \infty\right)$. ამ შემთხვევაში $y^2 - a\cdot y + a + 2 = 0$ განტოლებას უნდა ჰქონდეს განსხვავებული ნიშნის ფესვები, ან ერთი ფესვი ნულის ტოლი უნდა იყოს, ხოლო მეორე დადებითი. პირველ შემთხვევაში ვიეტის თეორემის თანახმად უნდა შესრულდეს პირობა $a + 2 < 0$. აქედან გამომდინარეობს: $a \in (-\infty; -2)$. მეორე შემთხვევაში $a = -2$, მაგრამ ამ შემთხვევაში განტოლების ერთი ფესვი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე უარყოფითი, ამიტომ, ეს შემთხვევა არ გვაძლევს მაჩვენებლიანი განტოლების ამონახსნს.

პასუხი: $a \in (-\infty; -2) \cup \left\{2 + 2\sqrt{3}\right\}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა ამოცანა: ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $y^2 - a\cdot y + a + 2 = 0$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი დადებითი ამონახსნი;

ბ) განიხილა შემთხვევა $D = 0$ და იპოვა $a = 2 + 2\sqrt{3}$;

გ) განიხილა უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} a^2 - 4(a+2) > 0 \\ a + 2 < 0 \end{cases}$$

ან ამოხსნა $a^2 - 4(a+2) > 0$ უტოლობა და იპოვა $a \in \left(-\infty;\, 2 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(2 + 2\sqrt{3};\, \infty\right)$;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა .

2 ქულა: ა, ბ;

3 ქულა: ა, ბ, გ;
4 ქულა: ა, ბ, გ, დ.